Quantenphysikalischer Zustandsraum im Kontinuum

Fritz Bopp

Z. Naturforsch. **39 a**, 205–217 (1984); received November 2, 1983

Quantum physical state space in continua

As previously shown, quantum physics for single pairs of creation and annihilation processes may be derived from first principles. Quantum physics at all can be therefore considered as an interplay of such elementary processes. This is easily possible if the number of pairs of processes is finite. Difficulties arise only for infinite numbers.

The difficulties are similar to those occurring in the derivation of the equation for an oscillating string from that for an oscillator chain. It is true that the spectra of both systems are not continuously connected. However, a weaker theorem is more important: The chain eigenvalue of each order converges to the string one of the same order for an infinitely growing number of oscillators of a certain kind. Therefore both systems are continuously connected in the sense of semiconvergency.

Exhausting the space continuum with a sequence of lattices equably becomming infinitely large and fine, the infinitely dimensional Hilbertspace is steadily connected with the finitely dimensional one in the sense of semiconvergency. It will be shown that the Hilbert spaces in the sequence of lattices yield the suitable tool for quantum physics as an interplay in the mentioned sense. This kind of Hilbert space, the so-called rational one, must be preferred in physics rather than the real one introduced by Hilbert, since all theories in physics are based on a finite number of data.

In particular, we formulate Dirac's equation in the rational Hilbert space. It is shown that, even in quantum physics, a theorem of classical physics remains true, according to which relativity results from certain principles formulating most obvious experiences. We obtain the Lorentz invariant Dirac equation mainly from a modification of Newtons definition II according to which $\boldsymbol{p} = H\boldsymbol{v}/c^2$ (instead of $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$).

1. Zur Begründung der Themafrage

Endlich dimensionale Zustandsräume der Quantenphysik sind zugleich endlich dimensionale Hilbert-Räume [1]. Bei Bewegungen im Raumkontinuum hat man es mit unendlich dimensionalen Zustandsräumen zu tun. Es liegt nahe anzunehmen, in diesem Falle sei der Zustandsraum mit dem manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raum äquivalent. Diese Äquivalenz scheint bisher niemand bezweifelt zu haben. Es gibt sogar Argumente, die die Äquivalenz zu beweisen scheinen.

In der Hilbert-Raumtheorie werden ebene Wellen als Zustandsvektoren ausgeschlossen, weil die Normquadrate divergieren. In der Physik sagt man, dies entspreche dem Umstand, daß man den ganzen Raum erfüllende ebene Wellen schon aus energetischen Gründen experimentell nicht herstellen könne. Darum sei es nur angemessen, ebene Wellen außer Betracht zu lassen. Dem entsprechen z. B. Berechnungen von Wirkungsquerschnitten [2], bei denen man nur begrenzte Wellenpakete zuläßt. Nur solche Rechnungen können beanspruchen, als streng im Sinne der Theorie des manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raumes betrachtet zu werden.

Doch sind Begriffe wie Massen, Wirkungsquerschnitte u. dgl. nur relativ zu ebenen Wellen definiert. Der Experimentalphysiker muß im allgemeinen streng darauf achten, daß die unvermeidlichen Grenzen der Wellenpakete die Messungen nicht stören. Auch in den Rechnungen, in denen man ebenen Wellen aus dem Wege geht, läßt man darum am Ende die Grenzen der Wellenpakete ins Unendliche abwandern. Danach gehören die ebenen Wellen zum Zustandsraum im Sinne des Newtonschen Begriffs der Ausweitung empirisch bestimmter Voraussetzungen durch Induktion zu logisch tragfähigen Axiomen. Die Ausklammerung ebener Wellen im manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raum ist also physikalisch nicht gerechtfertigt. Die Art, wie man im Rahmen dieser Theorie am Ende zu Wirkungsquerschnitten gelangt, läßt erkennen, daß man nicht von manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Räumen auszugehen braucht,

Reprint requests to Prof. Dr. F. Bopp, Sulzbacher Str. 3, 8000 München 40.

0340-4811 / 84 / 0300-0205 $ 01.3 0/0. – Please order a reprint rather than making your own copy.

sondern von endlich dimensionalen ausgehen kann, deren Dimension über alle Grenzen wächst.

Hat man es mit Dirac-Funktionen zu tun, also mit vier Paaren von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren je Punkt, so ist der Zustandsraum endlich dimensional, wenn es nur endlich viele Punkte im Raum gibt. Bei Z Punkten hat man $4Z$ Paare von Fermionenoperatoren mit je zwei Quantenzuständen, so daß die Dimensionszahl gleich 2^{4Z} ist. Wählt man speziell ein einfach kubisches Gitter mit Z Punkten, so kann man das unendlich ausgedehnte Raumkontinuum beliebig gut erfassen, wenn man das Gitter in gleichem Maße zugleich beliebig ausgedehnt und beliebig fein werden läßt. Man hat also den unendlich dimensionalen Zustandsraum im Blick, aber stets nur den endlich dimensionalen im Griff. Wir sprechen darum von einem unendlich dimensional werdenden Zustandsraum und nötigenfalls in entsprechendem Sinne von unendlich groß oder unendlich klein werdenden Zahlen und sogar kurz von unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen, die aber stets als werdende zu verstehen sind.

Damit kommen wir zu einem zweiten Punkte, der die Überlegenheit des zum Kontinuum strebenden Gitters deutlich macht. Im endlich dimensionalen Zustandsraum ist die Anzahl der Eigenwerte gleich der Anzahl der Freiheitsgrade. Die Abstände einiger Eigenwerte von dem Eigenwert des Grundzustands, d.h. einige Anregungsenergien können unendlich werden. In der Theorie des manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raumes verwirft man Operatoren mit solchen Eigenwerten, obwohl sie bei elementaren physikalischen Operatoren die Regel sind. Man muß also den Operatoren Zwang antun, um Spektren endlicher Energie zu erhalten. Im Zustandsraum mit unendlich werdender Dimensionszahl sind Eigenlösungen mit unendlich werdenden Anregungsenergien mathematisch möglich, physikalisch aber ebenso unerreichbar wie ebene Wellen. Sie scheiden also ohne besondere Annahmen aus. Nimmt man die Möglichkeit ihrer Existenz ernst, so können Teilchen Platz haben, die nur in Verbindungen auftreten und als isolierte wie z.B. die Quarks unbeobachtbar sind. Man braucht also weder besondere Hypothesen wie die sogenannten Bags, um solche Teilchen einzuführen, noch Eliminationen unendlicher Anregungsenergien.

Es gibt bereits ein klassisch physikalisches Beispiel, das in die gleiche Richtung weist. Physiker erläutern die Eigenschaften von Wellen am Beispiel von Oszillatorketten. Mathematiker haben bewiesen, daß es keinen Grenzübergang von Oszillatorketten zu schwingenden Saiten gibt. Sie sagen, Oszillatorbetrachtungen seien streng genommen falsch. Ihre Beweise sind nicht anfechtbar. Dennoch führt das Verfahren der Physiker keineswegs unstreng zu tieferer Einsicht.

Seien $n \in (0, 1, 2, \ldots, \Omega)$ die Orte von $\Omega + 1$ äquidistanten Oszillatoren und x_n ihre Amplituden, so lauten die Bewegungsgleichungen bei elastischer Kopplung zwischen Nachbarn

$$m\,\ddot{x}_n = f(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}), \quad m, f = \text{const.}$$

Bei festgehaltenen Enden lauten die Eigenlösungen

$$x_n^{(m)} = \sin\frac{\pi m n}{\Omega}\exp\{+i\,\omega_m t\}, \qquad m \in (0, 1, 2, \ldots, \Omega),$$

und die Frequenzen

$$\omega_m = 2\sqrt{\frac{f}{m}}\,\sin\frac{\pi m}{2\Omega}$$

liegen auf dem Sinusbogen $\omega = \sin\varphi$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi/2$. Die einzelnen Werte ergeben sich bei Unterteilung des festen Intervalls in Ω Teile.

Wenn $m \ll \Omega$ ist, wächst die Frequenz proportional zu m. Für größere Werte bleibt sie zurück. Kleine relative Absenkungen sind von der Größe

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\pi m}{2\Omega} - \sin\dfrac{\pi m}{2\Omega}}{\sin\dfrac{\pi m}{2\Omega}} \approx \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{m}{\Omega}\right)^2.$$

Liegt m nahe bei $\sqrt{\Omega}$, so ist ε von der Größenordnung $\pi^2/24\,\Omega$. Danach kann die Absenkung selbst für unendlich werdende m unmerklich klein werden, wenn nur Ω rascher über alle Grenzen wächst als m. Zwar gilt das Geht-nicht-Theorem der Mathematiker auch hier, weil der Sinusbogen niemals mit seiner Anfangstangente identisch ist. Doch kann man bei noch so hohem Oberton der schwingenden Saite Ω stets so groß wählen, daß der entsprechende Oberton der Oszillatorkette mit beliebig vorgegebener Genauigkeit auf der Anfangstangente liegt. In diesem physikalisch allein relevanten Sinne gibt es Konvergenz. Mit herkömmlichen mathematischen Begriffen kann man von Semikonvergenz sprechen. Semikonvergenz festzustellen ist mehr, als

Nichtkonvergenz zu beweisen. Auf dieses Mehr kann es ankommen.

Im Falle von Semikonvergenz hat dieser Begriff den Vorrang vor dem der Konvergenz. An die Stelle des Kontinuums herkömmlicher Definition tritt eine Folge von Gittern, die zugleich beliebig fein und ausgedehnt werden. Mit solchen Gittern kann man zwar das Kontinuum nicht darstellen, aber vollständig ausschöpfen. Die Methode der Ausschöpfung könnte auch im engeren Bereich der Mathematik Bedeutung gewinnen. Jedenfalls ist das Kontinuum, welches wir mit Computern unendlich werdender Kapazität erfassen, von vergleichbarer Art.

Es wird sich übrigens zeigen, daß mit Folgen von Gittern auch unendlich groß bzw. klein werdende Zahlen wie die Gitterausdehnung und die Gitterkonstante erfaßt werden, so daß sich selbst Begriffe der Non-Standard-Analysis [4] einordnen. Doch wird diese als etwas jenseits der herkömmlichen Analysis Stehendes entbehrlich, weil wir sogar vor der Tür der Standard-Analysis anhalten. Zwar haben wir unendlich große bzw. kleine Zahlen oder unendliche Folgen im Blick, aber stets nur endliche im Griff. Das reicht bereits für Standard- und Nonstandardrechnungen.

2. Folge von Gittern äquidistanter rationaler Zahlen

Seien Ω eine hinreichend große, als unendlich werdend gedachte natürliche und h eine ganze Zahl in einem gegebenen Intervall, so bilden die rationalen Zahlen

$$\xi = h/\Omega!\,, \quad -\Omega!^2 \leqq h \leqq +\Omega!^2\,, \tag{1}$$

ein endliches Punktgitter mit $2\Omega!^2 + 1$ Gitterpunkten und mit der Gitterkonstanten $\varepsilon = 1/\Omega!$, und Ω ist die Nummer des Elementes in einer Folge von Gittern obiger Art, die den weiteren Rechnungen zugrundeliegt. Jede rationale Zahl m/n (m beliebig, n positiv ganzzahlig) kommt von einem bestimmten Ω an in jedem der Gitter vor, nämlich stets dann, wenn $\Omega \geqq n$ und $|m| < n\Omega!^2$ ist. Denn dann ist $h = (m/n)\,\Omega!$ ganzzahlig und $|m/n| \leqq \Omega!$.

Schon mäßig große Werte von Ω dürften eine für alle physikalischen Zwecke ausreichende Feinheit und Größe des Gitter geben. Denn die kleinste durch physikalische Konstanten definierte Länge ist die Gravitationslänge des Elektrons $4\pi G m/c^2$ (G = Newtonsche Gravitationskonstante, m = Elektronenmasse, c = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit). Ihre Größenordnung ist 10^{-56} m. Die größte Länge ergibt sich aus der Materiedichte im Weltall $\varrho \approx 10^{-25}\,\mathrm{kg/m^3}$. Sie ist gemäß $\sqrt{c^2/4\pi G\varrho}$ von der Größenordnung 10^{26} m. Danach sollte $\Omega!^2 \geqq 10^{26}/10^{-56} = 10^{82}$ sein, was bereits für $\Omega = 30$ erfüllt ist. Der Wert $\Omega = 50$ reicht bequem aus, um Kugelsymmetrie und Lorentzinvarianz mit überwältigender Genauigkeit sicherzustellen, s. u. § 5. Denn dann gibt es innerhalb der Gravitationslänge mehr als 10^{40} Punkte.

Jede für rationale Argumente ξ definierte Funktion $f(\xi)$ läßt sich in der Folge der Gitter darstellen. Man kann also von Funktionen sprechen, die für alle rationalen Zahlen definiert sind, und auch von der Stetigkeit solcher Funktionen im Körper der rationalen Zahlen $\boldsymbol{Q}$. Zu jeder Zahl $\beta \in \boldsymbol{Q}$ gibt es bei Stetigkeit von $f(\xi)$ stets eine Zahl $\alpha \in \boldsymbol{Q}$, derart daß

$$|f(\xi) - f(\xi')| < \beta \quad \text{für} \quad |\xi - \xi'| < \alpha \tag{2}$$

ist.

Zur Vergleichung mit der Analysis kann man den Definitionsbereich von $f(\xi)$ mittels

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_n) \quad \text{für} \quad \xi = \lim_{u\to\infty} \xi_n \tag{3}$$

ausdehnen und damit eine Verbindung zwischen Gittersummen und Integralen herstellen. Integrierbarkeit vorausgesetzt ist

$$\sum_{\xi=a}^{b} f(\xi) = \delta \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \quad \delta = \sum_{\xi=0}^{1} 1\,. \tag{4}$$

Darin ist δ die Dichte der Gitterpunkte. Gleichheit besteht im Limes $\Omega \to \infty$, und bei hinreichend großem Ω kann man von Fastgleichheit sprechen. Gleichung (4) ist praktisch mit der Eulerschen Summenrelation äquivalent, weil man die Korrekturglieder bei wachsender Feinheit des Gitters weglassen kann.

Wir kehren von der Vergleichung mit der Analysis zum Gitterraum zurück, halten aber an (4) als Definition von Integralen im Gitterraum fest. Sofern Stetigkeit vorliegt, ist das Integral ein Symbol für die Folge der Werte der Gittersummen. Doch bleibt die Definition auch sinnvoll, und die algebraischen Regeln der Integralrechnung gelten unverändert, auch wenn

$$\frac{1}{\delta} \sum_{\xi=a}^{b} f(\xi)$$

nicht mehr konvergiert und einen Ausdruck liefert, der mit Ω über alle Grenzen wächst. Beispielsweise liefert die an ebene Wellen erinnernde Funktion

$$f(\xi) = e^{ik\xi}$$

als Normquadrat

$$\int f^*(\xi) f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\delta} \sum_{\xi=-\Omega!^2}^{\Omega!^2-1} f^*(\xi) f(\xi)$$

$$= \frac{1}{\delta} \sum_{-\Omega!^2}^{\Omega!^2-1} 1 = \frac{2\,\Omega!^2}{\delta}$$

und

$$\delta = \sum_{0}^{\Omega!-1} 1 = \Omega!\,.$$

Somit lautet die normierte ebene Welle

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\,\Omega!}} e^{ik\xi} \tag{5}$$

und braucht nicht mehr als Zustandsvektor verworfen zu werden [3].

Auch auf unstetige Funktionen kann man Definition (4) anwenden. Ein extremes Beispiel liefert das Kronecker-Symbol

$$\delta_{\xi,\xi'} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \xi' = \xi\,, \\ 0 & \text{für} \quad \xi' \neq \xi\,. \end{cases}$$

Seien

$$\delta(\xi - \xi') = \delta\,\delta_{\xi,\xi'} \tag{6}$$

und $f(\xi)$ eine stetige Funktion, so folgt aus (4)

$$\int \delta(\xi - \xi') f(\xi')\,\mathrm{d}\xi' = \frac{1}{\delta} \sum_{\xi'} \delta \cdot \delta_{\xi,\xi'} f(\xi')\,,$$

also

$$\int \delta(\xi - \xi') f(\xi')\,\mathrm{d}\xi' = f(\xi)\,. \tag{7}$$

Danach ist (6) die δ-Funktion im Gitteraum.

Rechts- bzw. Linksableitungen im Gitterraum definieren wir durch

$$f'_{\mathrm{r}}(\xi) = \frac{f(\xi+\varepsilon) - f(\xi)}{\varepsilon}\,, \quad \varepsilon = \frac{1}{\Omega!}\,, \tag{8}$$

bzw.

$$f'_l(\xi) = \frac{f(\xi) - f(\xi-\varepsilon)}{\varepsilon}\,, \quad f'_l(\xi+\varepsilon) = f'_{\mathrm{r}}(\xi)\,, \tag{9}$$

woraus als mittlere Ableitung

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi+\varepsilon) - f(\xi-\varepsilon)}{2\,\varepsilon} \tag{10}$$

hervorgeht. Danach sind z. B. δ-Funktionen differenzierbar. Beispielsweise ist

$$\int \delta'_{\mathrm{r}}(\xi - \xi') f(\xi')\,\mathrm{d}\xi'$$
$$= \frac{1}{\delta\varepsilon} \sum_{\xi'} (\delta_{\xi+\varepsilon,\xi'} - \delta_{\xi,\xi'}) f(\xi')\,,$$

woraus die bekannte Gleichung

$$\int \delta'_{\mathrm{r}}(\xi - \xi') f(\xi')\,\mathrm{d}\xi'$$
$$= \frac{1}{\varepsilon} (f(\xi+\varepsilon) - f(\xi)) = f'_{\mathrm{r}}(\xi) \tag{11}$$

folgt. Auch Ableitungen können unendlich werdend sein. Beispielsweise folgt aus

$$f(\xi) = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für} & \xi \leqq 0 \\ 1 & \text{für} & \xi > 0 \end{Bmatrix}:$$

$$f'_{\mathrm{r}}(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta_{\xi,0}\,, \quad f'_l(\xi) = \frac{1}{\varepsilon}\,\delta_{\xi,\varepsilon}\,. \tag{12}$$

Wir begnügen uns hier damit, an Beispielen gezeigt zu haben, daß die Regeln der Differential- und Integralrechnung anwendbar bleiben, und daß sie sogar ohne die üblichen Einschränkungen fast unbegrenzt gelten. Ansätze zu tieferen Beweisen findet man bei Schmieden und Laugwitz [4] überall dort, wo die Autoren ihrem konstruktivistischen Ausgangspunkt treu bleiben und keine Anlehnung an die Non-Standardanalysis von Robinson [5] suchen. Eine vollständige Fundierung der Analysis in Gitterräumen wäre wünschenswert, kann aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein [6].

3. Gitter in Raum und Impulsraum

Das geometrische Mittel aus dem Weltradius von etwa 10^{26} m und dem Gravitationsradius des Elektrons von etwa 10^{-56} m (s. Ziff. 2) ist nach Weyl und Eddington gemäß

$$l = 10^{-15}\,\mathrm{m} \tag{13}$$

von nuklearer Größe. Darum ist es zweckmäßig, eine Länge von etwa dieser Größe als Basis zu wählen, und Ortsvektoren in der Form

$$\boldsymbol{r} = l\,\xi\,, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,, \quad \xi_i \in (1)\,, \tag{14}$$

zu schreiben, wonach $l\,\varepsilon = l/\Omega!$ die Gravitationslänge und $l\Omega!$ gleich der halben Kubuskante ist, die etwa mit dem Weltradius übereinstimmt [7].

In jedem Punkte gebe es f Paare von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r})\,, \quad \psi_\alpha(\boldsymbol{r})\,, \quad \alpha \in (1, 2, \ldots, f)\,. \tag{15}$$

Die Vertauschungsrelationen für Fermionen lauten

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{r}')\} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'}\,,$$
$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi_\beta(\boldsymbol{r}')\} = \{\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{r}')\} = 0\,. \tag{16}$$

Faßt man die Komponenten $\psi_\alpha(\boldsymbol{r})$ zu einer einspaltigen Matrix zusammen und die Komponenten $\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r})$ zu einer einzeiligen, so lautet der Operator für die Fermionenzahl

$$N = \sum_r \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r}) = \delta \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \mathrm{d}\tau \equiv \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\,,$$

letzteres nach (4).

Bezieht man die Operatoren nicht auf Fermionen, sondern wie im Kontinuum üblich auf Fermionendichten, ersetzt man also

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\psi(\boldsymbol{r})\,, \quad \psi^\dagger(\boldsymbol{r}) \to \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\psi^\dagger(\boldsymbol{r})\,, \tag{16}$$

worin δ nunmehr die Dichte pro Volumeneinheit ist, so geht der Operator für die Fermionenzahl in

$$N = \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

über, und die Vertauschungsrelationen lauten

$$\begin{aligned} \{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r}')\} &= \delta_{\alpha\beta}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,, \\ \{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}), \psi_\beta(\boldsymbol{r}')\} &= \{\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}), \psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r}')\} = 0\,, \end{aligned} \tag{18}$$

worin $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ analog zu (6) gleich der δ-Funktion ist, nun bezogen auf das Raumgitter und auf die Volumeneinheit. Man rechnet leicht wie oben nach, daß

$$\begin{aligned} &\int \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,f(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' = f(\boldsymbol{r})\,, \\ &\int \nabla\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r})\cdot f(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\tau' = \nabla f(\boldsymbol{r}) \end{aligned}$$

ist usw.

Zum Impulsraum gelangen wir bei der Betrachtung von Funktionen $f(\boldsymbol{r})$ im Gitter. Zunächst beziehen wir uns auf eine Dimension und damit auf Funktionen $f(x)$ ($x \equiv x_1 = l\,\xi_1$) und lassen für x vorübergehend auch reelle Zahlen zu, aber nur solche im Intervall ($-l\Omega! \leqq |x| \leqq +l\Omega!$). Da nichts über das Verhalten der Funktion außerhalb des Intervalls gesagt wird, ist die Fourier-Darstellung der Funktionen vieldeutig, solange man keine Randbedingungen einführt. Will man um der Definition von Impulse willen ebene Wellen als Basisfunktionen bewahren, so muß man die Randbedingung

$$f(+l\Omega!) = f(-l\Omega!)$$

fordern. Damit wird das Geschehen am einen Rand mit dem am andern identifiziert, als hätte man einen Ring. Die Funktion $f(x)$ kann also nur in $2\Omega!^2$ Punkten willkürlich gewählt werden. Das ist bereits in den Summationsgrenzen bei der Berechnung von (5) unausgesprochen berücksichtigt worden.

Anwendung auf ebene Wellen ergibt $e^{+ipl\Omega!} = e^{-ipl\Omega!}$. Darum folgt für ganzzahlige m, so daß $2pl\Omega! = 2\pi m$ ist, also

$$p = \frac{\pi}{l}\,\frac{m}{\Omega!}\,, \quad |m| \leqq \Omega|^2\,. \tag{19}$$

Dadurch ist das Impulsgitter definiert. Es gibt wiederum $2\Omega!^2$ Gitterpunkte. Denn

$$e^{ipx} = e^{i\pi mn/\Omega!^2}$$

liefert für $m = \pm\Omega!^2$ die gleiche Funktion, nämlich $(-1)^n$.

Klarerweise ist

$$\sum_x e^{i\beta x} = \sum_{-\Omega!^2}^{\Omega!^2-1} e^{i\pi mu/\Omega!^2} = 2\,\Omega!^2\,\delta_{m,0}\,.$$

Die linke Seite ist nach Definiton gleich $\delta\int e^{ipx}\,\mathrm{d}x$ mit $\delta = \Omega!/l$. Somit erhält man

$$\begin{aligned} \int e^{ipx}\,\mathrm{d}x = 2l\Omega!\,\delta_{m,0} &= \frac{2l\Omega!}{\bar\delta}\,\bar\delta\,\delta_{p,0} \\ &= \frac{2l\Omega!}{\bar\delta}\,\delta(p)\,. \end{aligned}$$

Darin ist das Kronecker-Symbol $\delta_{m,0} = \delta_{p,0}$, $\bar\delta = (l/\pi)\,\Omega!$ die Punktdichte im Impulsraum und $\delta(\boldsymbol{p}) = \bar\delta\delta_{p,0}$ die δ-Funktion im Impulsraum. Man gelangt so gemäß der obigen Definitionen in Strenge zur Fourier-Darstellung der δ-Funktion

$$\delta(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\boldsymbol{p}x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Entsprechend erhält man im Dreidimensionalen die δ-Funktionen im Orts- und Impulsraum ($\mathrm{d}\tau' = \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$, $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$)

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau'\,,$$

$$\delta(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{8\pi^3}\int e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{20}$$

woraus (merklich einfacher als herkömmlich) das Fouriersche Integraltheorem hervorgeht. Darin zeigt sich vielleicht eine Überlegenheit der Ausschöpfung des Kontinuums mit einer Folge von Gittern.

Mittels Fourier-Transformationen kann man zu Operatoren im Impulsraum übergehen

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \psi(\boldsymbol{p})\, e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\tau\,,$$

$$\psi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \psi(\boldsymbol{r})\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\tau\,,$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\, e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\tau'\,,$$

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} \int \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\, e^{+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\tau\,. \tag{21}$$

Sie genügen ebenfalls den Vertauschungsrelationen für Fermionen in (18) natürlich mit $\boldsymbol{p}$ an Stelle von $\boldsymbol{r}$. Speziell erhält man

$$\{\psi_\alpha(\boldsymbol{p}_1), \psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{p}_2)\} = \frac{1}{8\pi^3} \int \{\psi_\alpha(\boldsymbol{r}_1), \psi_\beta^\dagger(\boldsymbol{r}_2)\} \cdot e^{-i(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{r}_2)} \mathrm{d}\tau_{12}$$
$$= \frac{\delta_{\alpha\beta}}{8\pi^3} \int e^{-i(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\cdot\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\tau = \delta_{\alpha\beta}\delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\,.$$

Wir dürfen also in Folgen von Gittern im Orts- und Impulsraum mit dem Fourierschen Integraltheorem rechnen. Die Anzahl der Gitterpunkte und damit die Anzahl der Quantenzustände, sowie die Dimensionen der Zustandsräume sind im Orts- und Impulsraum gleich groß. Das sollte in einer Quantenphysik selbstverständlich sein, die als Zusammenspiel von Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen verstanden wird, ist aber im reell unendlich dimensionalen Hilbert-Raum nicht gegeben. Beispielsweise bilden die Oszillatoren auf einem kontinuierlich gedachten, schwingenden Kreis ein nicht abzählbares Kontinuum, während das Spektrum diskret, also abzählbar ist. Das ist einer der zentralen Punkte, warum wir glauben, der reell unendlich dimensionale Hilbert-Raum sei der Quantenphysik nicht angemessen.

Es geht keineswegs darum, die Beweise der Hilbert-Raumtheorie in Frage zu stellen. Nur meinen wir, ihre Voraussetzungen seien mindestens in der Quantenphysik nicht haltbar. Die Methode, das Kontinuum mit Gitterfolgen in den Griff zu kriegen, könnte über die Quantenphysik hinaus Bedeutung haben. Denn man sollte mit ihr alle Rechnungen erfassen, die mit Computern unendlich werdender Kapazität durchführbar sind.

Solche Zweifel haben einen tieferen Grund. Im Zeitalter des Axiomatismus besteht eine Neigung, sich allzuleicht mit allgemein als „schön" anerkannten Axiomen zufrieden zu geben, ohne den kritischen Maßstab Newtons anzulegen. Axiome müßten durch Induktion aus Erfahrungssätzen hervorgehen [8], jenen Maßstäben also, mit denen man die scholastische Überbewertung der Logik überwunden hat. Eine säkularisierte Scholastik wäre nicht besser als eine theologisch geprägte.

4. Die Dirac-Gleichung für Elementarprozesse

Quantenphysikalische Bewegungen kommen dadurch zustande, daß ein Fermion in einem Punkt vergeht, und daß zur Kompensation ein anderes in einem infinitesimal benachbarten Punkt entsteht. Bewegungen beschreibende Operatoren sind also Bilinearformen in ψ und $\psi^\dagger$. Hiernach ist

$$H = \int \mathrm{d}\tau\, \psi^\dagger(\boldsymbol{r}) \mathscr{H}(\boldsymbol{r}, -i\nabla)\, \psi(\boldsymbol{r}) \tag{22}$$

die allgemeinste Form eines Bewegungen beschreibenden Hamilton-Operators im Schrödinger-Bild (Einheiten $\hbar$, c). Er ergibt sich hier nicht durch Quantisierung, sondern aus obiger Definition quantenphysikalischer Bewegungen.

Da der Hamilton-Operator H mit dem Operator N der Fermionenzahl vertauschbar ist, zerfällt der Zustandsraum in Teilräume mit konstanter Fermionenzahl. Man kann also speziell nach 1-Fermionenlösungen

$$|\Phi\rangle = \int \mathrm{d}\tau\, \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\, \Phi(\boldsymbol{r}, t)\, |0\rangle \tag{23}$$

suchen, worin φ eine einspaltige Matrix mit f Komponenten und $|0\rangle$ der durch $N|0\rangle = 0$ definierte Vakuumzustand

$$\psi_\alpha(\boldsymbol{r})\,|0\rangle = 0\,, \quad \langle 0|\,\psi_\alpha^\dagger(\boldsymbol{r}) = 0\,, \quad \langle 0|0\rangle = 1 \tag{24}$$

ist. Daraus erhält man als Wellengleichung für ein Fermion

$$i\dot{\Phi}(\boldsymbol{r}, t) = \mathscr{H}(\boldsymbol{r}, -i\nabla)\, \Phi(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{25}$$

In geometrisch optischer Näherung gelangt man mittels

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = u(\boldsymbol{r}, t)\, e^{iS(\boldsymbol{r}, t)}\,,$$

$$\partial_\alpha \Phi \approx i\partial_\alpha S \Phi\,,\ \partial_\alpha\partial_\beta \Phi \approx -\partial_\alpha S\, \partial_\beta S\, \Phi \quad \text{usw.}$$

zu der Gleichung für die vierkomponentige Matrix u

$$(\partial_t S + \mathscr{H}(\boldsymbol{r}, \nabla S))\, u = 0\,.$$

Die Gleichung hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn

$$\det(\partial_t S + \mathscr{H}(\boldsymbol{r}, \nabla S)) = 0$$

ist. Das ist eine Hamilton-Jacobische Differentialgleichung, aus der man die Hamilton-Funktion ableiten kann.

Die obige Gleichung für u beschreibt, wie sich die Orientierung u längs der Teilchenbahnen ändert. Man denke z. B. an die Drehung des Polarisationsvektors längs Strahlen in einem optisch aktiven Medium.

Gleichungen vom Typus (25) beschreiben auch Bewegungen in äußeren Potentialfeldern. Sie liefern dann eine pauschale Beschreibung von Umwelteinflüssen, die in Wirklichkeit auf Erzeugungs- und Vernichtungsprozessen in Nachbarpunkten beruhen. Andere, etwa im Raum verankerte Umwelteinflüsse soll es nicht geben. Darum darf $\mathscr{H}$ für isolierte 1-Fermionensysteme weder von $\boldsymbol{r}$, noch von t abhängen. Somit ist

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}(-i\nabla)\,, \quad \partial\mathscr{H}/\partial\boldsymbol{r} = 0\,, \quad \partial\mathscr{H}/\partial t = 0\,. \tag{26}$$

Relativ zu abgeschlossenen 1-Fermionensystemen sind also Raum und Zeit homogen.

Das wird hier nicht a priori vorausgesetzt, sondern aus der Annahme abgeleitet, daß es u. U. möglich sei, von Umwelteinflüssen abzusehen. Schon auf dieser Stufe ist es die Physik, welche ihre Geometrie bestimmt. Klarerweise wird diese Symmetrie durch Umwelteinflüsse gestört werden, jedoch so, daß jedes abgeschlossene Teilsystem die volle Symmetrie bewahrt. Das zu erreichen, wird die Aufgabe der Eichfeld-Theorien sein und gehört darum nicht zum gegenwärtigen Thema.

Die Homogenität der Zeit hat zur Folge, daß H ein Integral der Bewegung ist und als solches die Energie liefert. Die Homogenität des Raumes führt zum Impulsintegral

$$\boldsymbol{P} = \int d\tau\, \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\, \underline{\mathscr{P}}\, \psi(\boldsymbol{r})\,, \quad \underline{\mathscr{P}} = -i\nabla\,. \tag{27}$$

In der Tat ist

$$[H, \boldsymbol{P}] = \int d\tau\, \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\, \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial\boldsymbol{r}}\, \psi(\boldsymbol{r}) = 0\,.$$

Wenn man weiß, daß die Theorie Lorentz-invariant sein muß, kann man daraus den Operator $\mathscr{H}$ der Diracschen Theorie wie üblich ableiten. Doch das wäre ein Rückschritt gegenüber der klassisch physikalischen Mechanik, in der allein die Ersetzung der Newtonschen Definition II, nämlich $\boldsymbol{P} = m\,\boldsymbol{v}$, durch $\boldsymbol{P} = H\boldsymbol{v}$ zur speziellen Relativitätstheorie führt. Denn aus $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{P}}$ mit $H = H(\boldsymbol{P})$ für freie Materiepunkte folgt $\boldsymbol{P} = H\dfrac{\partial H}{\partial\boldsymbol{P}}$, also die Basisgleichung $H^2 - \boldsymbol{P}^2 = m^2 = \text{const}$ der speziellen Relativitätstheorie, von der aus man die ganze relativistische Mechanik entwickeln kann [9].

Das gilt auch in der Quantenmechanik, wenn man vom Schwerpunktssatz

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\,t = \text{const}$$

ausgeht und $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ als zwei noch unbekannte Operatoren betrachtet. Führt man mit Plusklammern $\{A, B\} = AB + BA$ die Größen

$$\underline{\mathscr{N}} = \tfrac{1}{2}\{\mathscr{H}, \boldsymbol{r}\}\,, \quad \underline{\mathscr{P}} = \tfrac{1}{2}\{\mathscr{H}, \boldsymbol{v}\} \tag{28}$$

ein, so kann man die zweite gemäß der Modifikation von Newtons Definition II mit dem Impuls identifizieren. Danach ist

$$\underline{\mathscr{K}} = \underline{\mathscr{N}} - \underline{\mathscr{P}}\,t = \text{const}\,. \tag{29}$$

Daraus folgt

$$\frac{d\underline{\mathscr{K}}}{dt} = \frac{\partial\underline{\mathscr{K}}}{\partial t} + i\,[\mathscr{H}, \underline{\mathscr{K}}]\,, \quad \text{also} \quad i\,[\mathscr{H}, \underline{\mathscr{N}}] = \underline{\mathscr{P}}\,. \tag{30}$$

In Verbindung mit den Heisenbergschen Vertauschungsrelationen $[\mathscr{P}_i, x_k] = -i\,\delta_{ik}$ erhält man

$$[\mathscr{P}_i\, \mathscr{N}_k] = -i\mathscr{H}\,\delta_{ik}\,. \tag{31}$$

Beide Kommutatorgleichungen liefern infinitesimale, von $\underline{\mathscr{N}}$ erzeugte Transformationen, durch die $\mathscr{H}$ und $\underline{\mathscr{P}}$ so ineinander transformiert werden, daß der Kommutator

$$[\underline{\mathscr{N}}, \mathscr{H}^2 - \underline{\mathscr{P}}^2] = 0$$

ist. Danach bleibt $\mathscr{H}^2 - \underline{\mathscr{P}}^2$ invariant. $\underline{\mathscr{N}}$ liefert also Lorentz-Transformationen und zwar die eigentlichen, die sogenannten „Boosts". Außerdem ist $\mathscr{H}^2 - \underline{\mathscr{P}}^2$ mit $\mathscr{H}, \underline{\mathscr{P}}$ und auch mit $\underline{\mathscr{M}}$ vertauschbar, wie aus der Definition

$$\mathscr{M}_{ik} = i\,[\mathscr{N}_i, \mathscr{N}_k] \quad \text{oder}$$

$$\underline{\mathscr{M}} = \{\mathscr{N}_{23}, \mathscr{N}_{31}, \mathscr{N}_{12}\} = i\underline{\mathscr{N}} \times \underline{\mathscr{N}} \tag{32}$$

hervorgeht. Danach ist m in

$$\mathscr{H}^2 - \underline{\mathscr{P}}^2 = m^2 \tag{33}$$

ein Integral der Bewegung, die Masse des Systems. Sie ist bei den zehn durch $\mathscr{H}$, $\underline{\mathscr{P}}$, $\underline{\mathscr{N}}$ und $\underline{\mathscr{M}}$ definierten Transformationen invariant. Diese bilden, wie sich zeigen wird, die zehnparametrige Poincaré-Gruppe, in älterer Literatur auch inhomogene Lorentz-Gruppe genannt.

Nimmt man an, daß es im Gitter nur Wechselwirkungen zwischen nächsten Nachbarn gibt, so folgt aus der Definition von Ableitungen im Gitter, daß

$$\mathscr{H} = -i\,\underline{\alpha}\cdot\nabla + m\,\beta$$

sein muß [10]. Darin sind $\underline{\alpha}$ und β konstante und dimensionslose Matrizen, und m erweist sich als identisch mit der Massenkonstante in (33). Substitution in diese Gleichung ergibt nun genau so wie bei Dirac

$$-\alpha_i\alpha_k\,\partial_i\partial_k - i\,m\,(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i)\,\partial_i + m^2 + \partial_i\partial_i = m^2\,,$$

also

$$\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\,\delta_{ik}\,, \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \tag{34}$$

Seien $\underline{\sigma}^{\mathrm{P}}$ die 2×2-Pauli-Matrizen, $\underline{\varrho} = \underline{\sigma}^{\mathrm{P}} \times 1$, $\underline{\sigma} = 1 \times \underline{\sigma}^{\mathrm{P}}$, so ist

$$\underline{\alpha} = \varrho_1\underline{\sigma}\,, \quad \beta = \varrho_3 \tag{35}$$

eine mögliche Lösung von (34). Sie liefert

$$\mathscr{H} = -\,i\,\varrho_1\,\underline{\sigma}\cdot\nabla + m\,\varrho_3 \tag{36}$$

und die Dirac-Gleichung

$$i\dot{\Phi}(\boldsymbol{r}, t) = (-\,i\,\varrho_1\,\underline{\sigma}\cdot\nabla = m\,\varrho_3)\,\Phi(\boldsymbol{r}, t)\,. \tag{37}$$

Die Matrizen in (34) lassen sich durch beliebig unitär transformierte ersetzen, ohne daß sich die Definitionsgleichungen (35) ändern. Sie führen zwar zu verschiedenen, aber zu physikalisch äquivalenten Dirac-Gleichungen. Umgekehrt gibt es keine den Gleichungen in (34) genügenden Matrizen, die nicht mit den speziellen in (35) durch unitäre Transformationen verbunden wären. Außer der Einheit gibt es nämlich keine Matrizen, die mit allen $\varrho_1\underline{\sigma}$ und ϱ_3 vertauschbar wären. Danach sind alle mit (34) verträglichen Matrizen unitär äquivalent, so daß die Klasse der äquivalenten Dirac-Gleichungen U4-symmetrisch ist. Das führt zu einer auf die Gruppe U4 sich gründenden Eichfeld-Theorie, welche in der Physik der Elementarteilchen Bedeutung haben könnte [11]. Die in den frühen Dreißigerjahren noch lebhaft diskutierte Frage, warum die Symmetrie der Dirac-Matrizen höher ist als die der Dirac-Gleichung, scheint hiermit eine Antwort zu finden.

Es gibt auch höher dimensionale Darstellungen der Matrizen in (34). Seien z. B. $\underline{\varrho} = \underline{\sigma}^{\mathrm{P}} \times 1 \times 1$, $\underline{\sigma} = 1 \times \underline{\sigma}^{\mathrm{P}} \times 1$, $\underline{\tau} = 1 \times 1 \times \underline{\sigma}^{\mathrm{P}}$, so sind

$$\underline{\alpha} = \varrho_1\underline{\sigma},\ \beta = \varrho_3\tau_1 \quad \text{und} \quad \underline{\alpha} = \varrho_1\tau_3\underline{\sigma},\ \beta = \tau_1\,,$$

mögliche Lösungen. Sie sind aber nicht mehr unitär äquivalent. Beispielsweise ist τ_1 mit dem ersten Matrixsatz vertauschbar, mit dem zweiten aber nicht. Man liebäugelt heute mit solchen höher dimensionalen Dirac-Gleichungen, ohne genau sagen zu können, was die Existenz nichtäquivalenter physikalisch bedeutet. Zwar könnte man wie in

$$\mathscr{H} = -\,i\,\varrho_1\,\underline{\sigma}\cdot\nabla + (m_0\,\varrho_3 + \boldsymbol{m}\cdot\underline{\tau}\,\varrho_3)$$

ein Spektrum von baren Massen einschleußen. Doch brauchte man dann physikalisch begründete Prinzipien (und nicht etwa Annahmen ad hoc), welche den Massenoperator liefern.

Einstweilen scheint es angemessen, die Möglichkeiten der Unitäräquivalenz der Dirac-Matrizen auszuschöpfen, bevor man zu $f > 4$ übergeht.

Aus (36) folgt im Einklang mit (28), daß

$$\underline{\mathscr{N}} = \tfrac{1}{2}\,\{-\,i\,\varrho_1\,\underline{\sigma}\cdot\nabla + m\,\varrho_3, \boldsymbol{r}\} \tag{38}$$

ist. Nach (32) folgt daraus

$$\underline{\mathscr{M}} = -\,i\,\boldsymbol{r}\times\nabla + \tfrac{1}{2}\underline{\sigma}\,. \tag{39}$$

Denn aus

$$(\mathscr{H}x_i + x_i\mathscr{H})\,(\mathscr{H}x_k + x_k\mathscr{H})$$

entfallen bei Kommutatorbildung die in $i\,k$ symmetrischen Glieder. Die übrigen ergeben zunächst

$$\mathscr{H}x_i\,\mathscr{H}x_k + x_i\,\mathscr{H}\mathscr{H}x_k + x_i\,\mathscr{H}x_k\,\mathscr{H}\,,$$

woraus

$$2\,x_i\,\mathscr{H}[\mathscr{H}, x_k] = [\mathscr{H}, x_i][\mathscr{H}, x_k] + 2\,x_i\,[\mathscr{H}, x_k]\,\mathscr{H}$$

hervorgeht. Wegen

$$[\mathscr{H}, x_k] = -\,i\,\varrho_1\,\sigma_k\,, \quad \mathscr{H}[\mathscr{H}, x_k] + [\mathscr{H}, x_k]\mathscr{H} = -\,2\,\partial_k$$

ergibt sich $-4\,x_i\,\partial_k - i\,\tau_l$, woraus (39) hervorgeht.

Man rechnet leicht nach, daß $\underline{\mathscr{M}}$ und $\mathscr{H}$ vertauschbar sind. Daraus folgt einerseits die Isotropie des Raumes. Andererseits ist $\underline{\mathscr{M}}$ das zu dieser Symmetrie gehörige Integral der Bewegung, der Drehimpuls. Dagegen sind die Boosts nach (30) keine Integrale der Bewegung. Die zu den eigentlichen Lorentz-Transformationen gehörigen Integrale sind vielmehr die explizit zeitabhängigen Größen $\underline{\mathscr{K}}$ in (29). Sie stimmen nur zur Zeit $t = 0$ mit $\underline{\mathscr{N}}$ überein und hängen danach mit der Anfangslage des Systems zusammen.

Man kann leicht nachprüfen, daß die Operatoren $\mathscr{H}$, $\underline{\mathscr{P}}$, $\underline{\mathscr{N}}$ und $\underline{\mathscr{M}}$ eine Lie-Algebra bilden und zwar die der Poincaré-Gruppe, weil $\mathscr{H}^2 - \underline{\mathscr{P}}^2$ invariant ist. Von hier aus gelangt man zur speziellen Relativitätstheorie und zur Minkowskischen Raum-Zeitgeometrie. Die relativistische Invarianz ist durch die Lie-Algebra sichergestellt.

Man könnte im Heisenberg-Bild leicht zu manifest kovarianten Operatoren übergehen. Doch ziehen wir das Schrödinger-Bild vor. In diesem Falle kann man nämlich dynamische und kinematische Probleme trennen. Sei $|\Phi\rangle$ eine Eigenlösung zum Gesamtimpuls $\boldsymbol{P} \neq 0$, so kann man rein kinematisch mittels eines Boosts zur entsprechenden Lösung mit dem Gesamtimpuls $\boldsymbol{P} = 0$ übergehen und umgekehrt. Für dynamische Fragen genügt es also, den Unterraum der Zustände mit dem Gesamtimpuls $\boldsymbol{P}=0$ zu betrachten. In diesem Unterraum herrscht die Kleingruppe (little group) von Wigner [12]. Da der Schrödinger-Operator relativ zur Kleingruppe invariant ist, beherrscht man mit ihm die Dynamik vollständig. Dabei stellt die Existenz der Lie-Algebra die relativistische Kovarianz sicher, vorausgesetzt daß man nur zu $\boldsymbol{P}=0$ gehörige Lösungen betrachtet.

Diese Bedingung ist in der Frühzeit der Quantenfeldtheorie nicht immer eingehalten worden, was zu Kovarianzfehlern geführt hat. Der Schluß, man müsse darum alle Rechnungen manifest kovariant führen, ist jedoch zu rigid. Es genügt, im Unterraum zu bleiben.

Quantenphysikalisch sind Maximalbeobachtungen von Interesse. Sie werden durch vollständige Sätze miteinander vertauschbarer Operatoren definiert. Solche Größen sind darum gemeinsam beobachtbar. In Hinblick auf die Bedeutung der Energie sind Maximalbeobachtungen, die $\mathscr{H}$ enthalten, von besonderem Interesse. Relativ zur Poincaré-Gruppe bilden die Energie $\mathscr{H}$, der Impuls $\underline{\mathscr{P}}$ und die Helizität $h=\underline{\mathscr{P}}\cdot\underline{\mathscr{M}}/\mathscr{H}$ eine Maximalbeobachtung. Im Unterraum der Kleingruppe fehlt wegen $\underline{\mathscr{P}}=0$ die Vorgabe einer Richtung durch $\underline{\mathscr{P}}$. Darum gehört neben $\mathscr{H}$ auch $\underline{\mathscr{M}}$ zur Maximalbeobachtung. Die Helizität verliert als Komponente von $\underline{\mathscr{M}}$ ihre Bedeutung.

Zum Schluß notieren wir die Erzeugenden der Poincaré-Transformationen im Zustandsraum freier Fermionen

$$H=\int \mathrm{d}\tau\, \psi^{\dagger}\mathscr{H}\psi\,, \qquad \boldsymbol{P}=\int \mathrm{d}\tau\, \psi^{\dagger}\underline{\mathscr{P}}\,\psi\,,$$

$$\boldsymbol{N}=\int \mathrm{d}\tau\, \psi^{\dagger}\underline{\mathscr{N}}\,\psi\,, \quad \boldsymbol{M}=\int \mathrm{d}\tau\, \psi^{\dagger}\underline{\mathscr{M}}\,\psi\,. \tag{40}$$

Damit ist die Dirac-Theorie für freie Fermionen als Zusammenspiel von Elementarteilchen begründet. Die Poincaré-Invarianz braucht wie in der klassischen Mechanik nicht vorausgesetzt zu werden. Die Homogenität der Raum-Zeit ergibt sich aus der Annahme, daß Wechselwirkungen nur von benachbarten Elementarprozessen und nicht von der Raum-Zeit ausgehen. Die Lorentz-Invarianz ist eine Folge der Modifikation von Newtons Definition II, die in Wahrheit ein Grundgesetz ist und die eigentlichen Lorentz-Transformationen liefert, sowie der Heisenbergschen Vertauschungsrelationen, welche zur Isotropie des Raumes führen.

5. Die Dirac-See

Die Dirac-Seevorstellung [13] gilt als veraltet. Von Elementarprozessen in endlich dimensionalen Zustandsräumen herkommend meinen wir, sie sei Ausdruck einer fundamentalen Symmetrie, die man nicht verschleiern sollte. Diracs Vorstellung ist eine mögliche Beschreibung eines durch die Dirac-Gleichung gegebenen Sachverhalts.

Eine Welt mit endlich vielen Elementarprozessen zerfällt in Teilwelten mit N Fermionen. Zwischen den Teilwelten gibt es übrigens auch bei Wechselwirkungen keine Übergänge. Bei Z Raumpunkten mit vier Operatorpaaren pro Punkt hat man $4Z$ Operatorpaare und $\binom{4Z}{N}$ Quantenzustände. Die Welt maximaler Variabilität enthält $2Z$ Fermionen und $\binom{4Z}{2Z}$ Quantenzustände. Der Zustand kleinster kinetischer Energie in dieser Teilwelt heißt „Dirac-See" und wird mit $|D\rangle$ bezeichnet. Alles Geschehen in der Dirac-Welt besteht in der Veränderung der Verteilung von $2Z$ Fermionen. Das überträgt sich auch auf unendlich dimensionale Zustandsräume, wenn man das Unendliche mittels der Folge von rationalen Gittern als Werdendes versteht.

Im Sinne von Newtons Definition [8] des Begriffs ist die Annahme der Dirac-Welt keine Hypothese, weil sie mathematisch aus jenen Basisprinzipien folgt, welche zur empirisch bewährten Dirac-Gleichung geführt haben. Doch ist es klar, daß dann die Fermionen, welche durch $\psi^{\dagger}$, ψ erzeugt bzw. vernichtet werden, nicht mit experimentell aufweisbaren Teilchen identifiziert werden können. Sie bilden eher einen relativistisch und quantenphysikalisch einwandfreien Äther. Wir nennen darum die Teilchen, auf die sich $\psi^{\dagger}$, ψ beziehen, „Urfermionen", fänden es sogar wegen der Prägnanz des Ausdrucks verlockend, vom „Ur" statt vom „Urfermion" zu sprechen, wäre v. Weizsäckers Ausdruck nicht auf eine logische Operation bezogen [14], mit der wir es hier nicht zu tun haben. Wenn kein Mißverständnis möglich ist, werden wir kurz von Fermionen sprechen.

Der Leser verzeihe die weitschweifige Analyse bei der Namenswahl. Seitdem Hilbert gesagt hat, statt von Ebenen, Geraden und Punkten könne man auch von Tischen, Stühlen und Bierseideln reden, wenn nur die Axiome stimmen [15], eine im gemeinten Sinne unbestreitbare These, sind wir oft mit Namen recht leichtfertig umgegangen. Gäbe es einen rein logischen Aufbau von Theorien, so wäre die Wahl der Namen wirklich belanglos. Doch ist das nach dem Gödelschen Satz [16] unerreichbar. Daraus folgt, daß Axiome, die mehr sind als Spielregeln oder ästhetisch befriedigende Konventionen, in Vorstellungen wurzeln, durch die unsere Begriffe mit unserem Tun verbunden sind, und Namen stellen diese Verbindung her. Sie bewirken, daß wir von vorneherein wissen, wovon wir reden. Interpretationsfragen stellen sich nicht mehr.

Zur Bestimmung der Dirac-See ist die Impulsraumdarstellung von H erforderlich. Aus

$$H = \int \mathrm{d}\tau\, \psi^\dagger (i\,\varrho_1 \underline{\sigma} \cdot \nabla + m\,\varrho_3)\,\psi$$

folgt nach Substitution von (21)

$$H = \int \mathrm{d}\tau'\, \omega(\boldsymbol{p})\, \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\, \Theta(\boldsymbol{p})\, \psi(\boldsymbol{p})\,, \tag{41}$$

$$\Theta(\boldsymbol{p}) = \frac{\varrho_1\, \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} + m\,\varrho_3}{\omega(\boldsymbol{p})}\,, \qquad \omega(\boldsymbol{p}) = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\,.$$

Danach lauten die 1-Fermionenfunktionen mit dem Spinor u

$$|\Phi\rangle = \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\, u(\boldsymbol{p})\, |0\rangle\,,$$

$$u(\boldsymbol{p}) = \frac{1 + \varepsilon\,\Theta(\boldsymbol{p})}{2} \cdot \frac{1 + \varepsilon'\,\tau_0(\boldsymbol{p})}{2}\, v\,;$$

$$\sigma_0(\boldsymbol{p}) = \underline{\sigma} \cdot \boldsymbol{p}/p\,; \quad \boldsymbol{p} = \text{const.} \tag{42}$$

Gemäß den vier Vorzeichenpaaren $(\varepsilon, \varepsilon') = (++, +-, -+, --)$ sind das vier unabhängige Lösungen, welche wegen

$$H(\Phi\rangle = \varepsilon\,\omega\,|\Phi\rangle \tag{43}$$

paarweise zu positiver $(\varepsilon = +1)$ bzw. zu negativer $(\varepsilon = -1)$ Energie gehören.

Anders als im manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raum sind die Vektoren (42) normierbar. Denn

$$\langle\Phi|\Phi\rangle = \langle 0|\, u^\dagger \psi^\dagger \psi\, u\, |0\rangle$$
$$= \langle 0\rangle\, u_\alpha^\dagger (\psi_\alpha^\dagger \psi_\beta + \psi_\beta \psi_\alpha^\dagger)\, u_\beta\, |0\rangle = 1$$

liefert

$$\langle\Phi|\Phi\rangle - \bar{\delta} u^\dagger u = 1\,.$$

Darin ist $\bar{\delta}$ die unendlich werdende Punktdichte in der Folge der Impulsgitter.

In der Dirac-Welt ist jeder Punkt des Impulsraumes mindestens im Mittel doppelt besetzt. Man erhält die tiefste Energie, wenn es in jedem Punkt zwei Fermionen negativer Energie gibt. Somit berechnet sich die Energie der Dirac-See aus

$$W = -2\bar{\delta} \int \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\, \mathrm{d}\tau' = -2Z\langle\omega\rangle\,.$$

Darin ist $\langle\omega\rangle$ der Mittelwert

$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{\bar{\tau}} \int \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\, \mathrm{d}\tau'\,; \quad \bar{\tau} = \int \mathrm{d}\tau'$$

und $Z = \bar{\delta}\bar{\tau}$ ist gleich der Anzahl der Punkte im Impulsraum. Dabei ist der Gesamtimpuls

$$\boldsymbol{P} = \bar{\delta} \int \boldsymbol{p}'\, \mathrm{d}\tau' = 0\,, \tag{44}$$

weil mit $+\boldsymbol{p}$ auch $-\boldsymbol{p}$ zum Integrationsgebiet gehört. Die Dirac-See ist also ein Zustandsvektor im Unterraum der Wignerschen Kleingruppe.

Die Berechnung des Mittelwerts $\langle\omega\rangle$ erfordert eine besondere Betrachtung. Nach der Kleingruppe muß das Integrationsgebiet kugelsymmetrisch sein. Doch ist das Basisgitter ein Kubus mit kubischen Zeilen. Die Kugelsymmetrie wird näherungsweise hergestellt, wenn man über eine Kugel mit dem Radius C integriert. Darin soll C eine unendlich werdende Größe sein, die unendlich klein gegen die Kante des Kubus $\frac{\pi}{l}\,\Omega!$ ist. Damit geht man zwei verschiedenen Gefahren aus dem Wege.

Die erste begegnet einem bereits im Kontinuum. Das Integral für $\langle\omega\rangle$ nimmt verschiedene Werte an, je nachdem ob wir den ganzen Raum mit einer Folge von Kugeln, von Kuben oder sonst wie erfassen. Wegen der sphärischen Symmetrie der Kleingruppe kommen nur Kugeln in Frage. Die Art des Grenzübergangs ist also physikalisch bestimmt. Das Integral über eine Kugel vom Radius C ergibt

$$\langle\omega\rangle = \frac{3}{C^3} \int_0^C \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}\, p^2\, \mathrm{d}p\,.$$

Mit $p = C\,q$ und $m = C\,\mu$ erhält man

$$\langle\omega\rangle = 3\,C \int_0^1 \sqrt{\boldsymbol{q}^2 + \mu^2}\, q^2 \mathrm{d}\boldsymbol{q}\,.$$

Da das verbleibende Integral endlich ist, wächst der Mittelwert mit C über alle Grenzen. Das endliche Integral ergibt

$$\tfrac{1}{4}\left\{(1 + \tfrac{1}{2}\mu^2)\sqrt{1 + \mu^2} - \tfrac{1}{2}\mu^4 \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \mu^2}}{\mu}\right)\right\} \approx \tfrac{1}{4}\,,$$

letzteres solange m endlich und damit μ unendlich klein werdend ist. Somit ist die Energie der Dirac-See bis auf relativ unendlich kleine Korrekturen gleich

$$W = -\tfrac{3}{2}\, C Z\,. \tag{45}$$

Das Ergebnis ist anschaulich verständlich. Jeder der Z Gitterpunkte liefert einen Beitrag zur Energie oberhalb $-2\sqrt{C^2+\mu^2} \approx -2C$. Daher muß $W > -2CZ$. Die unendliche Obergrenze von ω schlägt durch, weil die Anzahl der Zustände mit dem Impuls p proportional zu p^2 wächst.

Die zweite Gefahr besteht darin, daß die kubischen Gitterzellen die Kugelsymmetrie stören. Doch ist der Fehler, der davon herrührt, daß bei leichten Änderungen der Ausdehnung eines Volumens sprunghafte Änderungen stattfinden, im allgemeinen relativ unendlich kleine. Denn bei einer Kugel vom Radius P ist er von der relativen Größe

$$4\pi P^2 \cdot \frac{\pi}{l\Omega!} \Big/ \frac{4\pi}{3} P^3 = \frac{3\pi}{Pl} \cdot \frac{1}{\Omega!},$$

also nur merklich für Gebiete von der Größe der Gitterkonstante im Impulsraum, also für räumliche Erstreckungen, die unendlich groß gegen den Weltradius sind.

Den Zustandsvektor der Dirac-See kann man zwar – zumal im Gitter – explizite ausrechnen. Doch braucht man nur seine algebraischen Eigenschaften. Wir wissen, daß alle Fermionenzustände negativer Energie besetzt sind und keine mit positiver Energie. Er wird also von allen Erzeugern von Urfermionen negativer Energie und von allen Vernichtern von solchen mit positiver Energie annuliert. Aus (42) erhält man für

als Erzeuger

$$\begin{array}{cc} W > 0 & W < 0 \\ \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\dfrac{1+\Theta(\boldsymbol{p})}{2}, & \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\dfrac{1-\Theta(\boldsymbol{p})}{2}, \end{array}$$

als Vernichter

$$\frac{1+\Theta(\boldsymbol{p})}{2}\psi(\boldsymbol{p}), \quad \frac{1-\Theta(\boldsymbol{p})}{2}\psi(\boldsymbol{p}), \tag{46}$$

letzteres weil mit $\varepsilon_1 = \pm 1$ und $\varepsilon_2 = \pm 1$ folgende vier Antikommutatoren gelten

$$\left\{\left(\frac{1+\varepsilon_1\Theta(\boldsymbol{p}_1)}{2}\right)_{\alpha\varrho}\psi_\varrho(\boldsymbol{p}_1),\ \psi^\dagger_\sigma(\boldsymbol{p}_2)\left(\frac{1+\varepsilon_2\Theta(\boldsymbol{p}_2)}{2}\right)_{\sigma\beta}\right\}$$

$$= \delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\left(\frac{1+\varepsilon_1\Theta(\boldsymbol{p}_1)}{2}\cdot\frac{1+\varepsilon_2\Theta(\boldsymbol{p}_2)}{2}\right)_{\alpha\beta}$$

$$= \begin{cases} 0, \\ \delta(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\dfrac{1+\varepsilon_1\Phi(\boldsymbol{p}_1)}{2} \end{cases}$$

für $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ bzw. $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. Danach folgt aus der Definition der Dirac-See

$$\psi^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{1-\Theta(\boldsymbol{p})}{2}\,|D\rangle = 0, \quad \frac{1+\Theta(\boldsymbol{p})}{2}\psi(\boldsymbol{p})\,|D\rangle = 0,$$

$$N\,|D\rangle = 2Z\,|D\rangle, \quad \boldsymbol{P}\,|D\rangle = 0, \quad H\,|D\rangle = W_0\,|D\rangle \tag{47}$$

mit $W_0 = -\frac{3}{2}CZ$. Die Gleichungen in der ersten Zeile entspringen der obigen Definition. Die Eigenwerte in der zweiten müssen mit den ohne Operatoren berechneten Werten für Urfermionenzahl, Impuls und Energie übereinstimmen.

In herkömmlicher Weise gelangen wir zur Übersetzung der Urfermionensprache in die Teilchen-Antiteilchen (in die TA-)Sprache. Zustände für T und A seien durch

$$|T\rangle = \psi^\dagger(\boldsymbol{p})\frac{1+\Theta(\boldsymbol{p})}{2}u\,|D\rangle,$$

$$|A\rangle = u^\dagger\frac{1-\Theta(-\boldsymbol{p})}{2}\psi(-\boldsymbol{p})\,|D\rangle \tag{48}$$

definiert. Wendet man die nämlichen Operatoren mehrfach auf $|D\rangle$ an, so entstehen Systeme aus mehreren T und A. Zunächst bedeuten die Gleichungen in (48): Erzeugung eines Urfermions mit dem Impuls $+\boldsymbol{p}$ und der Energie $+\omega(\boldsymbol{p})$ und Vernichtung eines Urfermions mit dem Impuls $-\boldsymbol{p}$ und der Energie $-\omega(-\boldsymbol{p})$. Im letzten Falle fehlt in der Dirac-See ein Urfermion negativer Energie. Es entsteht eine Fehlstelle, ein Loch in der See. Dieses Loch verhält sich wie ein Teilchen positiver Energie.

Genauer gesagt folgt aus den Definitionsgleichungen für $|D\rangle$ und aus den Vertauschungsrelationen der Reihe nach

$$\begin{array}{ll} N\,|T\rangle = (2Z+1)\,|T\rangle, & N\,|A\rangle = (2Z-1)\,|A\rangle, \\ \boldsymbol{P}\,|T\rangle = +\boldsymbol{p}\,|T\rangle, & \boldsymbol{P}\,|A\rangle = +\boldsymbol{p}\,|A\rangle, \\ H\,|T\rangle = (W_0+\omega(\boldsymbol{p}))\,|T\rangle, & H\,|A\rangle = (W_0+\omega(\boldsymbol{p})\,|A\rangle. \end{array} \tag{49}$$

In beiden Fällen ist die Einteilchenenergie $\omega(\boldsymbol{p})$ positiv. Beide Systeme haben den gleichen Impus, weil ein fehlender Impuls $-\boldsymbol{p}$ in der See einem Impuls $+\boldsymbol{p}$ des Loches entspricht. Teilchen und Loch in (48) verhalten sich also wie Einteilchensysteme. Wir sprechen darum von Teilchen T und Antiteilchen A.

Die Urfermionenzahl ist für die beiden Zustände $|T\rangle$ und $|A\rangle$ um 1 größer bzw. kleiner als $2Z$. Beide Vektoren gehören zu einer anderen Welt. In der Dirac-Welt kommen T und A immer nur paarweise vor, gleichgültig wie groß der Abstand zwischen den Partnern ist. Danach können beliebige Zustände in der Diracwelt durch

$$|\Phi\rangle = F(\psi^\dagger, \psi)\,|D\rangle\,, \quad [N, F] = 0\,,$$
$$N\,|\Phi\rangle = [N, F]\,|D\rangle + FN\,|D\rangle = 2Z\,|\Phi\rangle\,. \tag{50}$$

dargestellt werden.

Da Hamilton-Operatoren auch im Wechselwirkungsfalle bei globalen Phasentransformationen $\psi \to \psi\, e^{i\chi}$, $\chi = \text{const.}$, invariant sein müssen, bleibt der Zerfall in Teilwelten konstanter Urfermionenzahl bestehen. Die Beschränkung auf die Dirac-Welt mit $2Z$ Urfermionen ist also auch bei Wechselwirkung nötig. Darum können die Zustandsvektoren in (50) auch solche bei Wechselwirkungen sein. Zugleich ist es möglich und nur eine Sache der Definition, T und A wie im kräftefreien Fall zu definieren.

Das ist unüblich. Man pflegt die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren bei Wechselwirkung auf den jeweiligen, von der Wechselwirkung abhängigen Grundzustand zu beziehen und so zu definieren, daß der Grundzustand wie die Dirac-See im kräftefreien Fall keine T und A enthält. Dabei werden die Grundbegriffe von den Ergebnissen weiterführender und nur näherungsweise durchführbarer Rechnungen abhängig. Mir scheint, daß dies eine überflüssige Komplikation ist.

Nach (50) ist es möglich, T und A bei Wechselwirkung genau so zu definieren wie bei freien Urfermionen. Natürlich ist der Grundzustand bei Wechselwirkung von der Dirac-See verschieden. Daraus folgt, daß der Grundzustand aus einem Nebel von Urfermionen über der See und einem Schaum aus Löchern in der See oder – anders gesagt – aus einem Nebel von T und A besteht. Er kommt durch eine Polarisation der in $|D\rangle$ zusammenfallenden Urfermionenpaare zustande. Das ist ein Bild, das der allzu früh verstorbene Källén gern gebraucht hat.

Klarerweise sind wir damit vor die Aufgabe gestellt, diejenigen Deformationen der Dirac-See, welche beobachtbare Teilchen beschreiben, aus dem Nebel herauszulösen. Das ist mindestens bei der Berechnung von Ewartungswerten leicht möglich. Aus (46) folgt nämlich

$$\langle D|\,\psi_\alpha(\boldsymbol{p}_1)\,\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{p}_2)\,|D\rangle = \left(\frac{1+\Theta(\boldsymbol{p}_1)}{2}\right)_{\alpha\beta} \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2)\,,$$
$$\langle D|\,\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{p}_1)\,\psi_\beta(\boldsymbol{p}_2)\,|D\rangle = \left(\frac{1-\Theta(\boldsymbol{p}_1)}{2}\right)_{\beta\alpha} \delta(\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2) \tag{51}$$

und

$$\langle D|\,\psi_\alpha(\boldsymbol{p}_1)\,\psi_\beta(\boldsymbol{p}_2)\,|D\rangle = 0\,,$$
$$\langle D|\,\psi^\dagger_\alpha(\boldsymbol{p}_1)\,\psi^\dagger_\beta(\boldsymbol{p}_2)\,|D\rangle = 0\,. \tag{52}$$

Beispielsweise erhält man die erste Gleichung in (51) mit Rücksicht auf (46) aus

$$\langle D|\,u^\dagger\psi_1\psi_2^\dagger v\,|D\rangle$$
$$= \langle D|\,u^\dagger\frac{1+\Theta_1}{2}\psi_1\psi_2^\dagger\frac{1+\Theta_2}{2}v\,|D\rangle\,.$$

(Darin stehen ψ_i, $\psi_i^\dagger$ für $\psi(\boldsymbol{p}_i)$ und $\psi^\dagger(\boldsymbol{p}_i)$). Da nach (46)

$$\langle D|\,\psi_2^\dagger\frac{1+\Theta_2}{2}v\,u^\dagger\frac{1+\Theta_1}{2}\psi_1\,|D\rangle = 0$$

ist, kann man in der vorhergehenden Gleichung das Produkt durch den Kommutator ersetzen. Das ergibt

$$\langle D|\,u^\dagger\psi_1\psi_2^\dagger v\,|D\rangle = \delta_{12}u^\dagger\frac{1+\Theta_2}{2}v$$

im Einklang mit der ersten Gleichung in (51). Die anderen ergeben sich entsprechend. Man sagt, das Operatorprodukt verschwinde bei solchen Umwandlungen durch Kontraktion.

Durch Kombinationen von Kontraktionen kann man die Erwartungswerte aller Größen ausrechnen. Sie werden nur dann von 0 verschieden sein, wenn die Anzahlen der Operatoren $\psi^\dagger$ und ψ in Ausdrücken wie

$$\langle D|\,u^\dagger\psi_1\psi_2^\dagger A\psi_3\psi_4^\dagger B\psi_5\psi_6^\dagger v\,|D\rangle \tag{53}$$

gleich groß sind. Darin kann man beliebige Paare ψ, $\psi^\dagger$ durch Kontraktion eliminieren. Die in (53) eingezeichneten Brücken liefern eine mögliche Kette von Kontraktionen, nämlich die der Paare 1 mit 4, 2 mit 5 und 3 mit 6. Bei n Paaren gibt es $n!$ verschiedene Ketten und damit $n!$ verschiedene mögliche Beiträge zum Erwartungswert.

Der spezielle Beitrag der Kette in (53) lautet

$$-\delta_{14}\delta_{23}\delta_{45}\,u^\dagger\frac{1+\Theta_1}{2}B\,\frac{1-\Theta_2}{2}A\,\frac{1+\Theta_3}{2}v\,. \tag{54}$$

die δ-Funktionen $\delta_{ik} \equiv \delta(\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_k)$ entsprechen denen in (51) und rühren von den Brücken in (53) her. Die Matrixfaktoren $\dfrac{1\pm\Theta}{2}$ hängen davon ab, ob im konkret zu kontrahierenden Operatorpaar ψ links oder rechts von $\psi^\dagger$ steht. Bei ungerader Anzahl der Überschneidungen von Brücken ist das Vorzeichen wie in (54) negativ, weil eine ungerade Anzahl von Vertauschungen ohne Kontraktionen nötig ist, um die zu kontrahierenden Operatoren aneinander heranzuführen. Eine Vereinfachung gegenüber herkömmlichen Rechnungen rührt daher, daß $(\delta(\boldsymbol{p}))_{\boldsymbol{p}=0} = \bar{\delta}$ im Gitter definiert ist und in der Distributionstheorie nicht. Darum gibt es hier keine Ausnahmestellen, die man kunstvoll umgehen muß.

Damit können wir zur Ausgangsfrage zurückkehren, wie man die Teilchen im Nebel erkennen kann. Unter den Beiträgen zum Erwartungswert gibt es solche, die mit der Entstehung des Nebels zusammenhängen. Diese kann man leicht eliminieren, indem man in Ausdrücken wie

$$\langle H \rangle_{\mathrm{a}} \equiv \langle D \mid F_1^\dagger H F_2 \mid D \rangle_{\mathrm{a}}$$

(angedeutet durch den Index a) diejenigen Kontraktionen wegläßt, in denen sämtliche Operatoren in $F_1^\dagger$ und F_2 untereinander kontrahiert sind.

Wir begnügen uns mit diesem Hinweis, Wechselwirkungsprobleme gehören nicht zum Gegenstand dieser Arbeit. Es sollte nur angedeutet werden, daß die Begriffe der Theorie für freie Urfermionen auch bei Wechselwirkungen ausreichen, weil man die Dirac-See, auch wenn sie keine Eigenlösung liefert, als Bezugszustand wählen kann.

[1] J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer-Verlag, Berlin 1932; hier: Axiome A bis E, S. 19/24.

[2] R. Haag u. W. J. R. Brenig haben das durchgeführt; vgl. A. Messiah: Quantenmechanik, Bd. I, übers. von J. Streubel u. W. de Gruyter, Berlin 1976; hier: Teil II, Kapitel 10.

[3] Das erinnert an die Verwendung eines Normierungsvolumens in frühen Streurechnungen, die gemäß l.c.2 verworfen worden sind. Hier kommt allerdings hinzu, daß auch unendlich kleine Abstände mittels abnehmender Gitterkonstanten vom Endlichen her angesteuert werden. Es handelt sich nicht mehr um einen Kunstgriff, sondern um einen neuen Weg, das Kontinuum in den Griff zu kriegen.

[4] C. Schmieden u. D. Laugwitz, Math. Z. **69,** 1 (1958); D. Laugwitz, The Theory of Infinitesimals, an Introduction of the Non-standard Analysis, Acad. Nazionale No **51** (1980).

[5] A. Robinson, Non-standard analysis; North-Holland Publ. Cy 1966.

[6] F. Bopp, Rationale Analysis; nichtpubliziertes Skriptum, Kopien erhältlich.

[7] H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1923; hier: Anhang III, S. 323.

[8] I. Newton: Scholium generale in F. Cajori, Sir Isaac Newton's principles; Univ. of California Press, Berkeley 1962; hier: S. 546/547.

[9] F. Bopp, Über die Einheit der klassischen Physik, Teile I bis IV; S. B. Bayer. Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl. 1983.

[10] Im Gitter gibt es anders als im Kontinuum nächste Nachbarn, und diese liegen der Definition der Ableitungen zugrunde.

[11] F. Bopp, Quantenphysikalischer Usprung der Eichidee; Ann. Phys., im Druck.

[12] E. Wigner, On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentzgroup; Ann. Math. **40,** 149 (1939).

[13] P. A. M. Dirac, Théorie du positron; Noyaux atomiques; 7^me^ Conseil du Physique, Solvay 1933; Gauthier Villars éd., 1934; hier ab S. 203. – Die Abkehr von der Dirac-See hängt mit den Problemen des manifest unendlich dimensionalen Hilbert-Raums zusammen. In der Folge von Gitterräumen ist sie entbehrlich und nicht einmal vorteilhaft.

[14] C. F. von Weizsäcker, Physikertagung der DPG, München 1966, Plenarvorträge, Teubner-Verlag, Stuttgart 1966.

[15] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, B. G. Teubner, Stuttgart 1956.

[16] K. Gödel, M. Math. Phys. **38,** 173 (1931).